JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij

7. lipnja 2011.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.
Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!
Rezultati i uvid u kolokvije: **petak, 10. lipnja 2011. u 11 sati**.

1

Zadatak 1

(15 bodova.)

(a) Napišite oblik i osnovna svojstva **Householderovog reflektora** reda n.

(b) Neka je $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$, uz $m \geq n$, pravokutna matrica koja ima puni rang po stupcima, tj. $\operatorname{rang}(G) = n$. Opišite kako se primjenom reflektora računa **QR faktorizacija** matrice G.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

7. lipnja 2011.

(10 bodova.) Na vektorskom prostoru svih realnih funkcija definiranih na skupu $\{0, 1/3, 1\}$ zadan je "diskretni" skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} f(0) \cdot g(0) + f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot g\left(\frac{1}{3}\right) + f(1) \cdot g(1).$$

Nađite ortogonalne polinome stupnja 0, 1 i 2, s vodećim koeficijentom jednakim 1, obzirom na ovaj skalarni produkt. **Bez računanja** objasnite kako bi izgledao ortogonalni polinom stupnja 3 i kolika je njegova norma u ovom skalarnom produktu.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

7. lipnja 2011.

(15 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG | IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

7. lipnja 2011.

(15 bodova.) Odredite težine w_1, w_2, w_3 i čvor x_2 u Gauss–Lobattovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x}\, f(x)\, dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(x_2) + w_3 f(1)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{5/3}$ i nađite pravu grešku.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

7. lipnja 2011.

(10 bodova.) Nađite najmanje rješenje jednadžbe

$$xe^x = 2x + 1$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij

7. lipnja 2011.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.
Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!
Rezultati i uvid u kolokvije: **petak, 10. lipnja 2011. u 11 sati**.

1

Zadatak 1

(15 bodova.)

(a) Napišite oblik i osnovna svojstva **Givensove rotacije** u ravnini. Kako izgleda matrica rotacije reda n u (i, j) ravnini?

(b) Neka je $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$, uz $m \geq n$, pravokutna matrica koja ima puni rang po stupcima, tj. $\operatorname{rang}(G) = n$. Opišite kako se primjenom ravninskih rotacija računa **QR faktorizacija** matrice G.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

7. lipnja 2011.

(10 bodova.) Na vektorskom prostoru svih realnih funkcija definiranih na skupu $\{0, 2/3, 1\}$ zadan je "diskretni" skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle = f(0)\cdot g(0) + f\left(\frac{2}{3}\right)\cdot g\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\, f(1)\cdot g(1).$$

Nađite ortogonalne polinome stupnja 0, 1 i 2, s vodećim koeficijentom jednakim 1, obzirom na ovaj skalarni produkt. **Bez računanja** objasnite kako bi izgledao ortogonalni polinom stupnja 3 i kolika je njegova norma u ovom skalarnom produktu.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

7. lipnja 2011.

(15 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x+3}}\,dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-5}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

7. lipnja 2011.

(15 bodova.) Odredite težine w_1, w_2, w_3 i čvor x_2 u Gauss–Lobattovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)\, dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(x_2) + w_3 f(1)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{3/2}$ i nađite pravu grešku.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

7. lipnja 2011.

(10 bodova.) Nađite najveće rješenje jednadžbe

$$(x+1)e^x = x+2$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

JMBAG | IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij

7. lipnja 2011.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent. Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova! Rezultati i uvid u kolokvije: **petak, 10. lipnja 2011. u 11 sati**.

Zadatak 1

1

(15 bodova.) Neka je $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$, uz $m \geq n$, pravokutna matrica koja ima puni rang po stupcima, tj. $\mathrm{rang}(G) = n$.

(a) Napišite "puni" i "skraćeni" oblik **QR faktorizacije** matrice G.

(b) Napišite iskaz teorema o **egzistenciji i jedinstvenosti** QR faktorizacije matrice G.

(c) Ukratko komentirajte što se događa ako G **nema** puni rang po stupcima.

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

7. lipnja 2011.

(10 bodova.) Na vektorskom prostoru svih realnih funkcija definiranih na skupu $\{0, 1/2, 1\}$ zadan je "diskretni" skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = f(0) \cdot g(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot g\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\, f(1) \cdot g(1).$$

Nađite ortogonalne polinome stupnja 0, 1 i 2, s vodećim koeficijentom jednakim 1, obzirom na ovaj skalarni produkt. **Bez računanja** objasnite kako bi izgledao ortogonalni polinom stupnja 3 i kolika je njegova norma u ovom skalarnom produktu.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

7. lipnja 2011.

(15 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 \frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

7. lipnja 2011.

(15 bodova.) Odredite težine w_1, w_2, w_3 i čvor x_2 u Gauss–Lobattovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} f(x)\, dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(x_2) + w_3 f(1)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{4/3}$ i nađite pravu grešku.

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 5

7. lipnja 2011.

(10 bodova.) Nađite najmanje rješenje jednadžbe

$$(x-2)e^x = x+1$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

7. lipnja 2011.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.
Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!
Rezultati i uvid u kolokvije: **petak, 10. lipnja 2011. u 11 sati**.

1

ZADATAK 1

(15 bodova.) Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, uz $n \geq m$, pravokutna matrica koja ima puni rang po stupcima, tj. $\mathrm{rang}(A) = m$, i neka je $b \in \mathbb{R}^n$ zadani vektor.

(a) Napišite pripadnu matričnu formulaciju problema **najmanjih kvadrata**.

(b) Napišite iskaz teorema o **karakterizaciji** rješenja problema najmanjih kvadrata preko sustava **normalnih jednadžbi** i njegovu geometrijsku interpretaciju.

(c) Ukratko komentirajte što se događa ako A **nema** puni rang po stupcima.

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

7. lipnja 2011.

(10 bodova.) Na vektorskom prostoru svih realnih funkcija definiranih na skupu $\{0, 1/4, 1\}$ zadan je "diskretni" skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{3} f(0) \cdot g(0) + f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot g\left(\frac{1}{4}\right) + f(1) \cdot g(1).$$

Nađite ortogonalne polinome stupnja 0, 1 i 2, s vodećim koeficijentom jednakim 1, obzirom na ovaj skalarni produkt. **Bez računanja** objasnite kako bi izgledao ortogonalni polinom stupnja 3 i kolika je njegova norma u ovom skalarnom produktu.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

7. lipnja 2011.

(15 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{x+2}}\,dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-5}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

7. lipnja 2011.

(15 bodova.) Odredite težine w_1, w_2, w_3 i čvor x_2 u Gauss–Lobattovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, f(x)\, dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(x_2) + w_3 f(1)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{3/2}$ i nađite pravu grešku.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

7. lipnja 2011.

(10 bodova.) Nađite najveće rješenje jednadžbe

$$(x-1)e^x = x+2$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!